LA DERIVATION

I) RAPPELLES

1) Activités :

Activité 1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x)=2x^2+x-3$ est dérivable en $a=2$.

2- Montrer en utilisant la définition que la fonction $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ est dérivable en $a=1$

3- Montrer en utilisant la définition que la fonction $h(x)=\sqrt[3]{2x^2+3}$ est dérivable en $a=-1$.

4- La fonction $u(x)=\sqrt{x^2-9}$ est-elle dérivable en $a=3$.

Activité 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction $\begin{cases} f(x)=2x^2+x & \text{si } x\leq 1 \\ f(x)=\frac{4x+2}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $a=1$

Activité 3 :

1- Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x)=|2x^2-8|+x+1$ en $a=-2$.

2- Déterminer l'équation de la tangente en $A(0,g(0))$

3- Déterminer les équations des demi-tangentes au point $B(-2,g(-2))$

4- Présenter les 3 tangentes.

2) Rappelles.

2.1 Définitions et propriété de base

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **ouvert de centre a**.
On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :

Si f est dérivable en a et $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ On pose : $h=x-a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Application :

Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en $a=1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,a+r[$ où $r>0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on la note : $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r,a]$où $r>0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on la note : $f'_g(a)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.
f est dérivable en a si et seleument si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

2.2 Fonction affine tangente

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

On a : $(x-a)\varphi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$ et par suite :
$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$
Posons : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ on aura : $f(x) = u(x) + (x-a)\varphi(x)$
La fonction u est une **fonction affine** et s'appelle ***la fonction affine tangente en a.***

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
$u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Remarques:

- La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a
  On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si on pose $x = a + h$; on aura : $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f\ (a + h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple :

Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :
- $f(x) = sinx$
- $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est conu)
- $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3-\pi) = \pi - 3$.

2.3 Interprétation géométrique :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
$u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice :

Soit $(x) = x^2$, $A(a, f(a))$ un point de C_f ; T est la tangente à C_f en A. La droite T coupe respectivement (Ox) et (Oy) en M et N.

Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

Théorème :

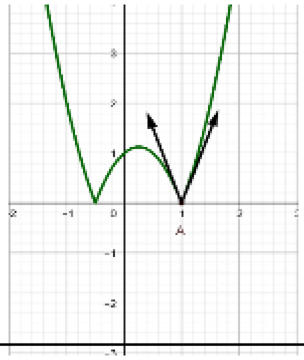
- Si f est une fonction dérivable **à droite** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a (T_d) d'équation : $(T_d) \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ \boldsymbol{x \geq a} \end{cases}$
- Si f est une fonction dérivable **à gauche** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a (T_g) d'équation : $(T_g) \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ \boldsymbol{x \leq a} \end{cases}$

Exemple :

$f(x) = |-2x^2 + x + 1|$; On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$

donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d)\begin{cases} y = 3(x-1) \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$ et $(T_g)\begin{cases} y = -3(x-1) \\ \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases}$ qu'on peut représenter par :



2.4 Opérations sur les fonctions dérivées :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** $\boldsymbol{I}$. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.**

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
cos	$-sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
$tanx$	$1 + tan^2x$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + k\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	**Sa fonction dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

3) Dérivation et continuité :

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en a alors elle est continue en a

Preuve :

On a : $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

Où : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

$= f(a)$ car $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

Donc f est continue en a.

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie ; $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (vérifier le)

Exercice :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x + a}{x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1- Trouver une relation entre a et b afin que la fonction soit continue en 1.

2- Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

II) DERIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$ et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$ alors (gof) est dérivable en a et $(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors (gof) est dérivable sur I et pour tout a dans I on a : $(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)$

Preuve :

Puisque f est dérivable en a alors : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Et Puisque g est dérivable en $b = f(a)$ alors : $\lim\limits_{k\to 0} \frac{g(b+k)-g(b)}{k} = g'(b)$

On a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(gof)(a+h)-(gof)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}$$

On pose $k = f(a+h) - f(a)$

On a : $\lim\limits_{h\to 0} k = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ car f est continue en a (car elle est dérivable en a)

et $f(a+h) = k + f(a)$ par suite :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}\right] &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} \times \frac{k}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] \qquad \text{car : } k = f(a+h) - f(a) \\ &= \lim_{k\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k}\right] \times \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] \\ &= g'(f(a) \times f'(a) \end{aligned}$$

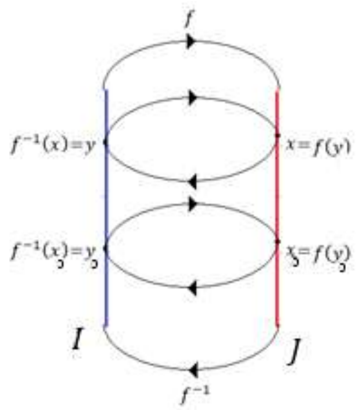
Exercice :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$
2. $g(x) = cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$
3. $h(x) = \tan(cosx)$

III) DERIVATION DE LA FONCTION RECIPROQUE :

1) Propriété et exemple.



Soit f une fonction continue strictement monotone sur I et soit f^{-1} sa fonction réciproque de $J = f(I)$ vers I.

On suppose que f est dérivable sur I et que $(\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)$

Montrons que f^{-1} est dérivable sur J.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} \qquad \text{(car } (\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)\text{)}$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} \qquad \text{(car quand } x \; tend \; vers \; x_0 \text{ on a } y = f^{-1}(x) \; tend \; vers \; f^{-1}(x_0)\text{)}$$

$$= \frac{1}{f'(y_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Théorème :

> Soient f une fonction continue strictement monotone sur I, et $J = f(I)$ et a un élément de I
>
> - Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.
> - Si f est dérivable I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et $(\forall x \in J)(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exemple :

$f(x) = cosx$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1,1]$ (Prouver-le)

Et on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

Remarque :

La première assertion du théorème précèdent nous permet de trouver $(f^{-1})'(x_0)$ sans savoir l'expression de f^{-1} ; il suffit de connaitre $f^{-1}(x_0)$.

Exercice :

Soit $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x^2 \end{matrix}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice corrigé :

Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Monter que g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]-1,1[$.

3- Vérifier que $\left(\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)(g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction :

1- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \leq 0$
- Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers

$$g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x), \lim_{x \to 0^+} g(x)\right[=]-1,1[$$

Donc g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]-1,1[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

3- On a :g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)(g'(x) = -2\sin(2x) \neq 0)$ donc g^{-1} est dérivables sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$; $\quad (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$$= \frac{1}{-2\sin(2g^{-1}(x))} \qquad \left(\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)\left(sin2\alpha = \sqrt{(1 - cos^2(2\alpha))}\right)$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - cos^2(2(g^{-1}(x)))}}$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - (g(g^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

2) La dérivée de la fonction $arctan$

Activité :

1- Montrer que la fonction $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\left(arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

Propriété :

La fonction $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\left(arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

Corolaire :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est dérivable sur I alors $\boldsymbol{arctan(u(x)}$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)\left((\arctan(u(x)))' = \frac{1}{1+(u(x))^2}\right)$

Preuve (En exercice)

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})\left(f(x) = arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1- Montrer que f est une constante sur $]0,+\infty[$, et trouver $f(x)$ pour x dans $]0,+\infty[$.

2- Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(2x^2+x+1)-\frac{\pi}{2}}{2Arctan(x)-\pi}\right)$.

3) La dérivée de la racine n-eme

Activité :

1- Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

2- Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

3- Soit u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I.

a) Montrer que $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I.

b) Montrer que $(\forall x \in I)((\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Propriété 1 :

Soit n un entier naturel non nul

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)((\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$

$g(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice 2 :

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^4+1}-\sqrt[4]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x+1}}$

Propriété 2 :

Soit r un nombre rationnel

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)((x^r)' = r\, x^{r-1}$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction u^r est dérivable sur I et $(\forall x \in I)((u(x))^r)' = r\, u'(x).\left(u(x)\right)^{r-1}$

Exercice :

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+sinx}{cosx} & \text{si } x \in [0,\frac{\pi}{2}[\\ f(x) = \frac{4}{\pi}\, arctan\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right) & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3- Soit g la restriction de la fonction f sur $[0,\frac{\pi}{2}[= I$

a) Déterminer l'intervalle J image de I par g

b) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} et que g^{-1} est dérivable sur J.

c) Montrer que :$(\forall x \in J)((g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

d) En déduire $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

4- Etudier les variations de f sur $]-\infty,0[$.